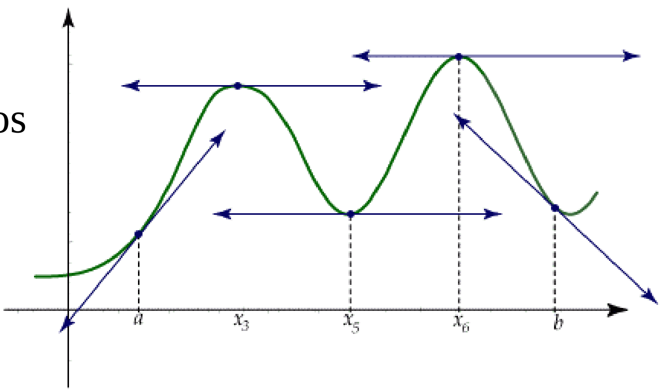
BLOQUE 3.

USOS DE LA DERIVADA

- Máximo o el mínimo de una función mediante los criterios de la derivada



- Puntos de inflexión de una curva mediante el criterio de la segunda derivada

Criterios de evaluación

Criterio	Ponderación
Practica evaluativa	**60 puntos**
Actividades de aprendizaje	**40 puntos**

SEMANA 1: DEL 27 DE NOVIEMBRE AL 1 DE DICIEMBRE

Introducción

La derivada es útil para resolver casos en los que se requiere saber cuál es la mejor opción entre muchas, en cuanto a optimización, mayor área, menor costo, etc. Por ejemplo, un ejidatario necesita elegir la mezcla de cultivos que sea la más apropiada para producir la mayor ganancia. Un pediatra desea seleccionar la menor dosis de una droga que curará cierta enfermedad. A un empresario le gustaría minimizar el costo de distribución de sus productos. Algunas veces, un problema de este tipo puede formularse de modo que implique maximizar o minimizar una función en un conjunto específico. Si es así, los métodos de cálculo proporcionan una herramienta poderosa para resolver el problema.

Te sugiero u método que puede aplicarse a problemas prácticos de optimización. No lo sigas ciegamente; si el sentido común te sugiere una forma alterna, no dudes es seguir tu lógica

Paso 1: Has un dibujo del problema y asigna variables para las

cantidades importantes. Paso 2: Escribe una fórmula o un modelo, esta

es la que se maximizará o minimizará

Paso 3: Usa las condiciones del problema para eliminar todas, excepto una de

estas variables, Paso 4: Encuentra los puntos críticos (fronterizos,

estacionarios, singulares).

Paso 5: Sustituye los valores críticos en la función y analiza los resultados.

Usa siempre su intuición para obtener alguna idea de cuál debe ser la solución del problema.

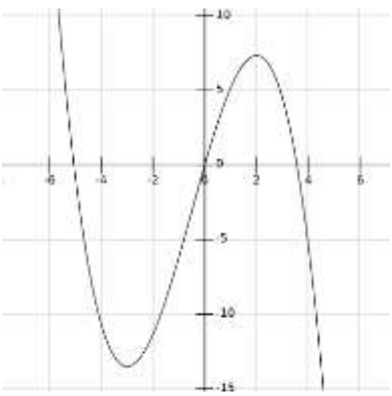
Dirección de Educación Media Superior
Escuela Preparatoria Estatal No 06
Alianza de Camioneros

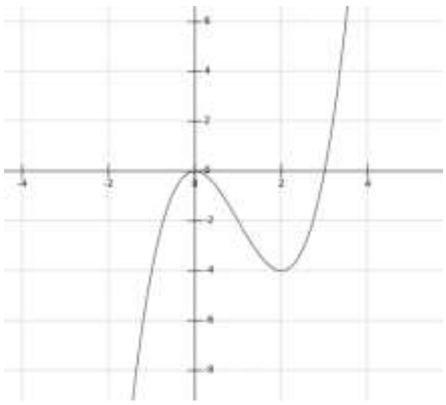
EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

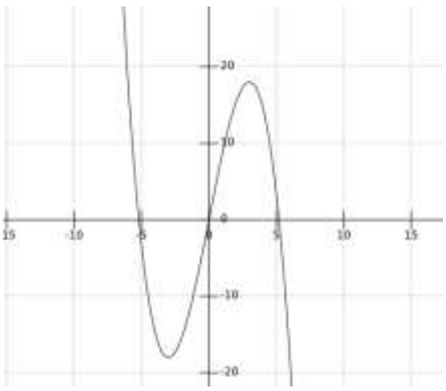
Nombre del alumno: ____Fecha: __________________

Instrucciones: Determina lo que se te pide

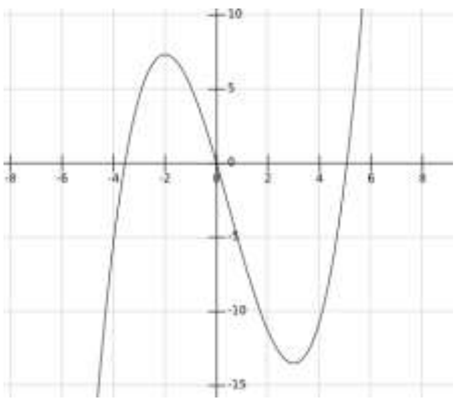
1. En cada una de las gráficas escribe del lado derecho los siguinetes datos: intervalos donde son crecientes, intervalos donde son decrecientes, coordenadas de las raices, puntos de retorno, máximo grado de la función, puntos críticos (investiga la definición de los conceptos que desconozcas)



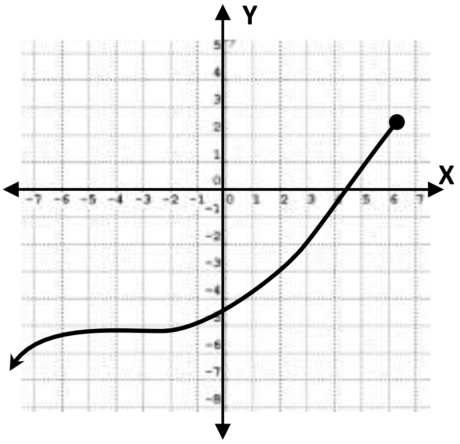


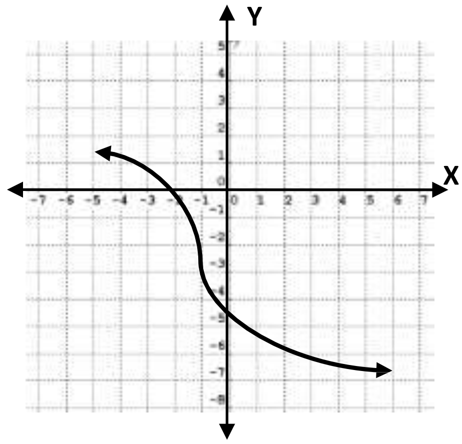


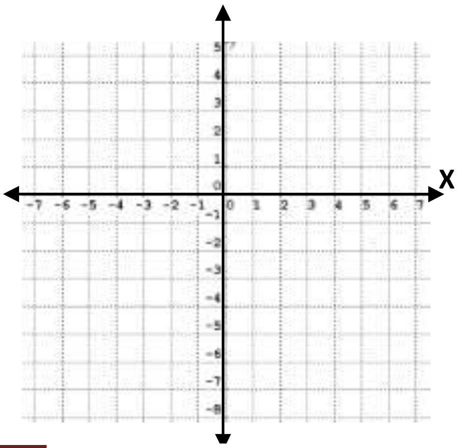
Y

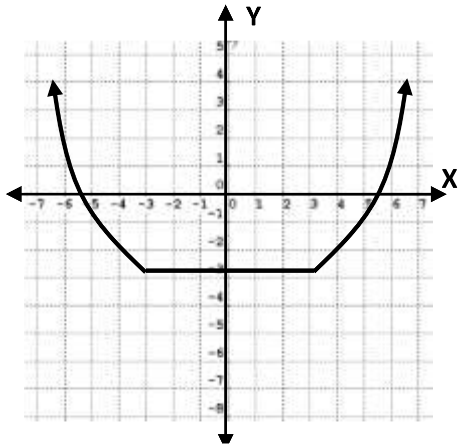


2. Colorea de azul donde la función es creciente y de rojo donde es decreciente y de verde el punto de inflexión, y los puntos críticos de negro.









DERIVACIÓN IMPLÍCITA

Para hallar la derivada en forma implícita no es necesario despejar y. Basta derivar tanto el miembro derecho como el izquierdo de la igualdad con respecto a la misma variable, utilizando las reglas vistas hasta ahora y teniendo presente que:

- $\frac{d}{dx}x = x' = 1$
- $\frac{dy}{dx} = y'$
- $\frac{d}{dx}f(y(x)) = f'(y(x))y'(x)$

Ejemplos de derivación

1. Derivar a la ecuación en su forma implícita

$$6x - 2y = 0$$

$$\frac{d}{dx}(6x - 2y) = \frac{d}{dx}0$$
$$6\frac{d}{dx}x - 2\frac{d}{dx}y = 0$$
$$6 - 2y = 0$$
$$6 = 2y'$$
$$y' = 3$$

2. Derivar a la ecuación en su forma implícita

$$x^2 + y^2 - 7 = 0$$

$$2x + 2yy' = 0$$
$$2yy' = -2x$$
$$y' = \frac{-2x}{2y}$$
$$y' = -\frac{x}{y}$$

Cuando las funciones son más complejas vamos a utilizar una regla para facilitar el cálculo, veamos:

Si tenemos la estructura

$$F_x + F_y = 0$$

al derivar de manera implícita

$$F_x' + F_y' y' = 0$$

y al despejar y' llegamos a la siguiente fórmula

$$y' = -\frac{F_x'}{F_y'}$$

3. Derivar a la ecuación en su forma implícita

$$\sec^2 x + \csc^2 y = 0$$

$$y' = -\frac{2\sec x \sec x \tan x}{-2\csc y \csc y \cot y} = \frac{\sec^2 x \tan x}{\csc^2 y \cot y}$$

4. Derivar a la ecuación en su forma implícita

$$x^2 y - xy^2 + y^2 = 7$$

$$x^2 y - xy^2 + y^2 = 7$$

$$2xy + x^2 y' - (y^2 + 2xyy') + 2yy' = 0$$

$$2xy + x^2 y' - y^2 - 2xyy' + 2yy' = 0$$

$$x^2 y' - 2xyy' + 2yy' = -2xy + y^2$$

$$y'(x^2 - 2xy + 2y) = y^2 - 2xy$$

$$y' = \frac{y^2 - 2xy}{x^2 - 2xy + 2y}$$

5. Derivar a la ecuación en su forma implícita

$$x^2 \sin(x+y) - 5ye^x = 3$$

Aquí no aplica la fórmula mencionada ya que ambos sumandos dependen tanto de x como de y, significa que debemos derivar como la forma usual

$$\frac{d}{dx}\left(x^2\sin(x+y)-5ye^x\right)=\frac{d}{dx}3$$
$$x^2\cos(x+y)(1+y')+2x\sin(x+y)-5ye^x-5e^xy'=0$$
$$\left(x^2\cos(x+y)-5e^x\right)y'=5ye^x-2x\sin(x+y)-x^2\cos(x+y)$$
$$y'=\frac{5ye^x-2x\sin(x+y)-x^2\cos(x+y)}{x^2\cos(x+y)-5e^x}$$

Actividad de Aprendizaje 1
Derivadas implicitas

Nombre del alumno: _______________________________________ Fecha: _____________

II. Determina la derivada de las siguientes funciones implícitas

a) $x^2+y^2=4$

b) $2xy=1$

c) $y^2-8x=0$

d) $x^2+2y^2+5x-2y-1=0$

e) $3x^2 + 2xy - 6y^2 = 1$

ASIGNATURA: Cálculo Diferencial	LISTA DE COTEJO Bloque 3	ADA 1 Valor: 5 puntos
GRADO y GRUPO:	FECHA:	

Elemento	Puntos	Puntos obtenidos	Observaciones
El trabajo se entrega en tiempo y forma a través del representante del equipo. La lista de cotejo se integrará en la parte final de la ADA	-1		
Presenta una **portada** (logotipo, datos de la escuela, Título del trabajo, el criterio, integrantes del equipo, materia, nombre del profesor, grado, grupo y fecha de entrega).	-1		
Formato: Escrito de puño y letra del estudiante. Instrucciones en tinta azul o negra, procedimiento con lápiz respuesta final resaltada en rojo. Engrampadas en lado superior izquierdo.	-1		
Contenido			
Utiliza los conceptos y presenta explicaciones o procedimientos al resolver derivadas implícitas	5		
Participación y actitudes			
Participan de manera colaborativa, honesta y responsable durante la elaboración de la actividad. Demuestran una actitud positiva con el profesor y sus compañeros durante el bloque.	-2		*En caso de plagio total o parcial la calificación es CERO.
Total	**5**		

RECTA TANGENTE Y NORMAL

Si una función $y = f(x)$ posee una derivada en el punto x_1, la curva tiene una tangente en $P(x_1, y_1)$ cuya pendiente es:

$$m_1 = \tan\theta = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_1} = f'(x_1)$$

Se sabe que la ecuación de la recta que pasa por un punto y con una pendiente dada es: $y - y_1 = m(x - x_1)$. Por lo tanto, si se sustituye la pendiente por la derivada, la ecuación de la ***recta tangente*** en un punto de una curva es:

$$y - y_1 = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_1}(x - x_1)$$

Una ***recta normal*** a una curva en uno de sus puntos es la recta que pasando por dicho punto es perpendicular a la recta tangente en él.

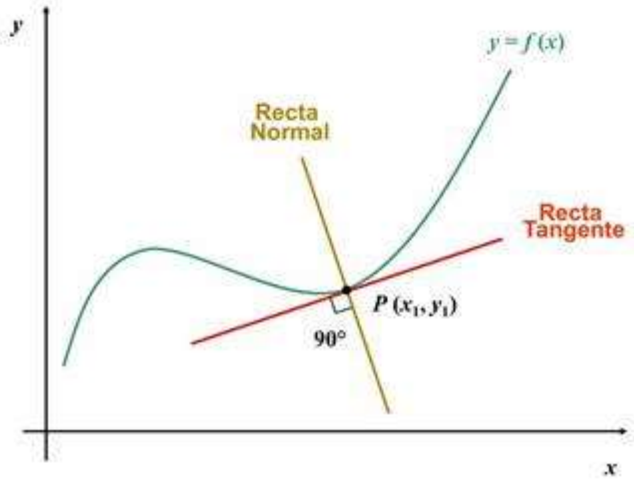
La condición de perpendicular entre dos rectas es:

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \Rightarrow m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_1}}$$

La ecuación de la recta normal en el punto $P(x_1, y_1)$es:

$$y - y_1 = -\frac{1}{m_1|_{x=x_1}}(x - x_1)$$

Gráficamente esto es:



OBSERVA QUE:

Si $m = 0$ tiene tangente horizontal a la curva. Si $m = \infty$ tiene tangente vertical a la curva.

Actividad de Aprendizaje 2
Recta Tangente y Recta Normal

Nombre del alumno: ____ Fecha: ____________

I. Determina la recta tangente y normal de las siguientes funciones

1. $f(x) = x^2 - 4x$, en $x = 3$

2. $y = x^2 + 5$ en el punto . $(-2,9)$

3. $y = x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 5x - 9$ en el punto . $(-1, -4)$

4. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ en el punto $(\sqrt{5}, 2)$

5. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ en el punto $(3, 2)$

ASIGNATURA: Cálculo Diferencial	**LISTA DE COTEJO** **Bloque 3**	**ADA 2** **Valor: 5 puntos**
GRADO y GRUPO:	**FECHA:**	

Elemento	**Puntos**	**Puntos obtenidos**	**Observaciones**
El trabajo se entrega en tiempo y forma a través del representante del equipo. La lista de cotejo se integrará en la parte final de la ADA	-1		
Presenta una **portada** (logotipo, datos de la escuela, Título del trabajo, el criterio, integrantes del equipo, materia, nombre del profesor, grado, grupo y fecha de entrega).	-1		
Formato: Escrito de puño y letra del estudiante. Instrucciones en tinta azul o negra, procedimiento con lápiz respuesta final resaltada en rojo. Engrampadas en lado superior izquierdo.	-1		
Contenido			
Utiliza los conceptos y presenta explicaciones o procedimientos al determinar en forma correcta la recta normal y la recta tangente	5		
Participación y actitudes			
Participan de manera colaborativa, honesta y responsable durante la elaboración de la actividad.	-2		*En caso de plagio total o parcial la calificación es CERO.
Demuestran una actitud positiva con el profesor y sus compañeros durante el bloque.			
Total	**5**		

SEMANA 2: DEL 4 AL 8 DE DICIEMBRE

APRENDIZAJES ESPERADOS:

8) Analiza las regiones de crecimiento y decrecimiento de una función.

9) Encuentra en forma aproximada los máximos y mínimos de una función.

SESIÓN 1 y 2

MÁXIMO Y MÍNIMOS DE UNA FUNCIÓN

Un máximo y un mínimo en un intervalo no son necesariamente el mayor ni el menor valor de la función, por eso se les llama máximo y mínimos relativos.

Para obtener los máximos y mínimos relativos, hay dos procedimientos:

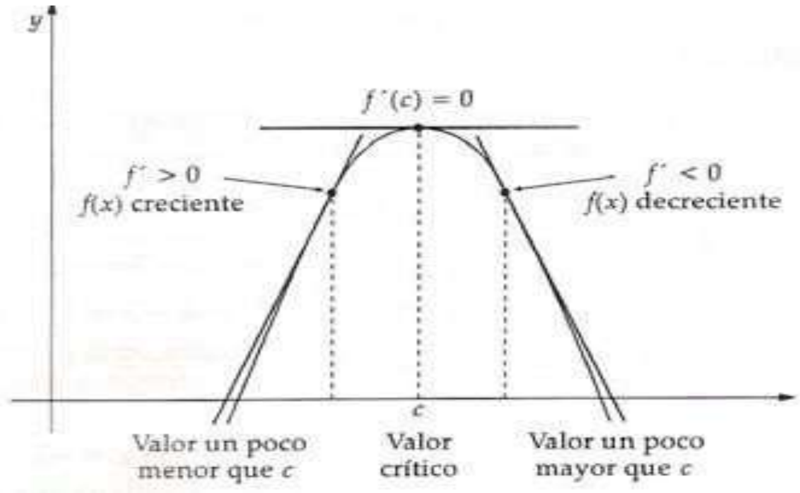
- El criterio de la primera derivada.
- El criterio de la segunda derivada.

Criterio de la primera derivada para encontrar puntos máximos y mínimos

a) Si f´(x)> 0, para todo valor en un intervalo y f´(x) < 0 para un intervalo consecutivo (es decir, la derivada cambia de valores positivos a negativos), entonces existe un valor máximo local o relativo en la función.

b) Si f´(x)<0, para todo valor en un intervalo y f´(x) > 0 para un intervalo consecutivo (es decir, la derivada cambia de valores negativos a positivos), entonces existe un valor mínimo local o relativo en la función.

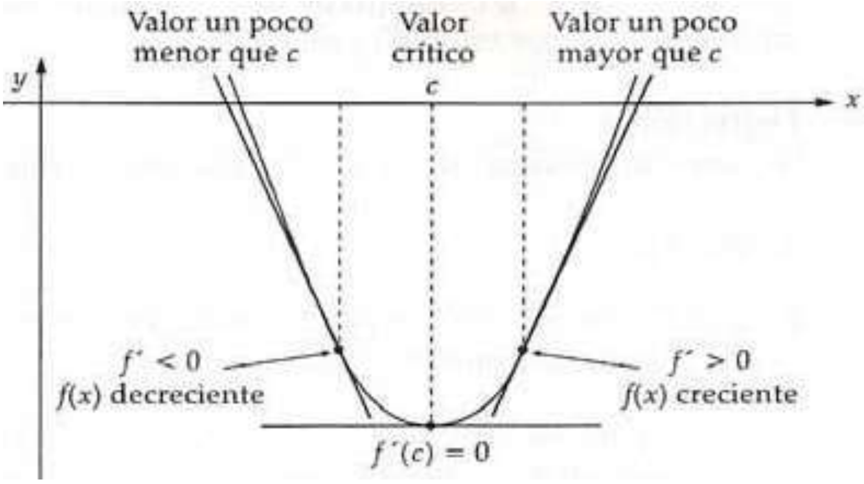
c) Si para todo intervalo f´(x) tiene el mismo signo, entonces no existe valor máximo ni mínimo.



- *Máximo relativo:* La función pasa de creciente a decreciente; es decir, el valor de la derivada pasa de positivo a negativo.

Mínimo relativo:

La función pasa de decreciente a creciente; es decir, el valor de la derivada pasa de negativo a positivo



Pasos para hallar los máximos y mínimos relativos de una función

1. Derivar f(x)

2. Encontrar los valores críticos.

3. Determinar los intervalos de prueba con los valores críticos obtenidos.

4. Determinar el signo de f(x) en cada uno de los intervalos utilizando un número de prueba en cada uno.

5. Análisis de resultados. Si el signo de f(x) en los intervalos de prueba consecutivos es diferente, entonces en el punto crítico hay un extremo relativo.

    a) Si en el que está a la izquierda del valor crítico dicho signo es positivo y a la derecha es negativo, entonces el punto crítico es un máximo relativo de f(x).

    b) Si por el contrario, f(x) tiene signo negativo a la izquierda del valor crítico y signo positivo a la derecha, entonces el punto crítico es un mínimo relativo de f(x).

    c) Sí f (x) no cambia de signo alrededor del valor crítico entonces no es ni máximo ni mínimo

Paso 6. Determinar el (los) puntos críticos.

Ejemplo: Hallar los máximos y mínimos relativos de la función $f(x) = x^3-3x^2+4$

Paso 1 Derivar la función $f(x) = x^3-3x^2+4$……. *donde* $f'(x) = 3x^2-6x$

Paso 2 Encontrar los valores críticos.

Resolviendo la ecuación que resulta de igualar la derivada a cero:

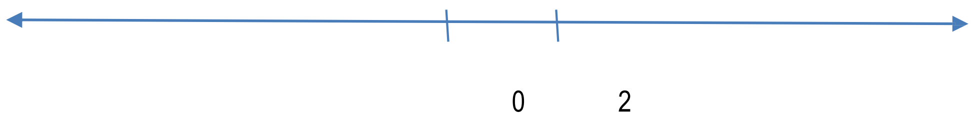
$$3x^2-6x=0$$

Esta resulta ser una ecuación de segundo grado, podemos resolver por factorización por lo que se obtiene: *$3x(x - 2)=0$*

Igualando cada uno de los factores a cero tenemos que:

$3x= 0$ donde, despejando $x = 0$ *y $(x - 2)= 0$ donde despejando $x= 2$*

Paso 3. Determinar los intervalos de prueba con los valores críticos obtenidos.



Se ubican en la recta numérica los valores, de tal manera que se puede observar que los intervalos serán de $(-\infty, 0)$, de $(0, 2)$ y de $(2, \infty)$

Paso 4. Determinar el signo de f(x) en cada uno de los intervalos utilizando un número de prueba en cada uno de éstos.

Se elige un valor menor y uno mayor próximo al valor crítico para analizar

Intervalo	Número elegido	Evaluación en la derivada	Signo
$(-\infty, 0)$	-5	$y = 3(-5)^2-6(-5) = 105$	$f(x)>0$
$(0, 2)$	1	$y = 3(1)^2-6(1)= -3$	$f(x)<0$
$(2, \infty)$	4	$y = 3(4)^2-6(4) = 24$	$f(x)> 0$

Paso 5. Análisis

El cambio es de positivo a negativo y después de negativo a positivo.

Del cambio de positivo a negativo podemos concluir que la función tiene un máximo según el inciso a del criterio de la primera derivada en el valor crítico $x=0$.

Del cambio de negativo a positivo podemos concluir que la función tiene un mínimo según el inciso b del criterio de la primera derivada en el valor crítico $x=2$.

Paso 6. Se evalúa en la función para hallar la ordenada de los puntos críticos.

En $f(x) = x^3-3x^2+4$

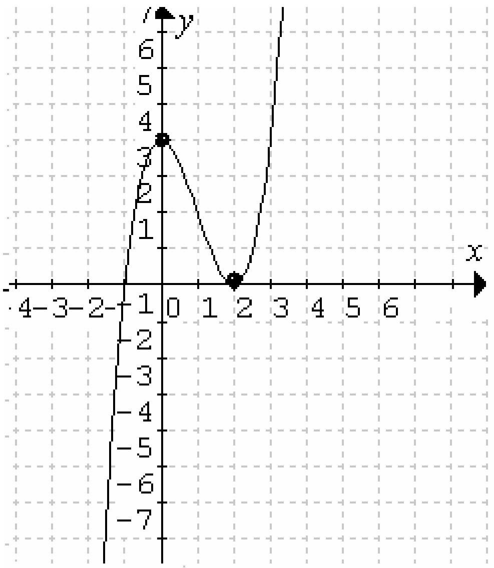
Para $x = 0$ $y= (0)^3-$

$3(0)^2+4$ $y= 4$ Para

$x= 2$ $y= (2)^3-$

$3(2)^2+4$ $y= 0$

Por lo que el punto (0,4) es un máximo relativo y el punto (2,0) es un mínimo relativo



CONCAVIDADES Y PUNTO DE INFLEXIÓN.

Son los puntos donde cambia el sentido de la concavidad de una función. Para ello se usa la segunda derivada.

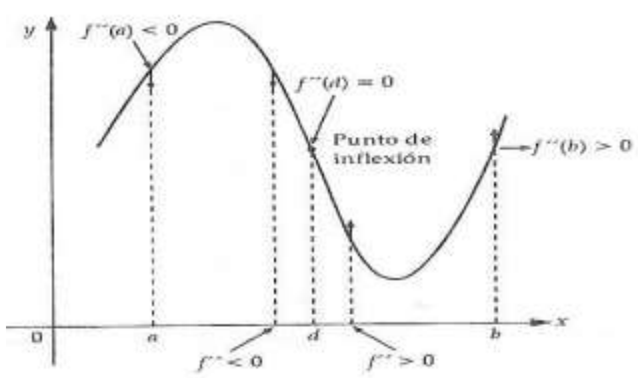
Con los puntos de inflexión podemos determinar los intervalos de prueba para determinar si una función es cóncava hacia arriba o hacia abajo en cada una de ellas.

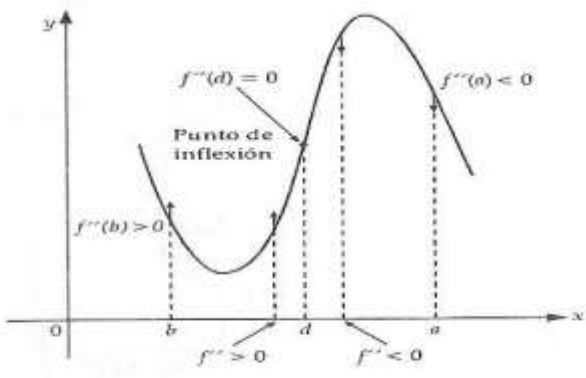
Pasos para determinar la concavidad de una función f(x)

1. Determinar la segunda derivada f''(x).
2. Igualar a cero f''(x) = 0.
3. Resolver la ecuación resultante.
4. Determinar los intervalos de prueba utilizando los valores de x, obtenidos en el paso anterior.
5. Hallar el signo de f''(x) en cada intervalo.

Si f''(x) es positiva en un intervalo, entonces f(x) es cóncava hacia arriba, o sea, si f''(x)>0 entonces la función f(x) es cóncava hacia arriba ∪.

Si f''(x) es negativa en un intervalo, es cóncava hacia abajo, o sea, si f''(x)< 0 entonces la función f(x) es cóncava hacia abajo ∩.





Ejemplo: Dada la función $f(x) = x^3 - 9x^2 + 1$ encuentra:

a) Los puntos de inflexión.

b) Los intervalos donde es cóncava hacia arriba ∪

c) Los intervalos donde es cóncava hacia abajo ∩

Paso 1 Determina la segunda

derivada $f'(x) = 3x^2 - 18x$

$f''(x) = 6x - 18$

Paso 2 Igualando la segunda derivada a cero tenemos que:

$6x - 18 = 0$

Paso 3 Resolver la ecuación anterior:

$6x - 18 = 0$ $6x = 18$ $x = 3$

El único valor de la abscisa del **punto de inflexión** es x = 3, por lo que la ordenada la hallamos sustituyendo en $y = x^3 - 9x^2 + 1$, $y = (3)^3 - 9(3)^2 + 1$….. donde y= -53

Siendo en único punto de inflexión (3, -53)

Determinando los intervalos y números de prueba.

En $f''(x) = 6x - 18$

Análisis

Intervalo	Número elegido	Evaluación en la segunda derivada $f''(x) = 6x - 18$	Signo
(-∞, 3)	0	*$y'' = 6(0) - 18 = -18$*	**$f''(x)<0$**
(3, ∞)	**4**	***$y'' = 6(4) - 18 = 6$***	**$f''(x)> 0$**

Por lo tanto:

(-∞,3) Cóncava hacia abajo y (3,∞) Cóncava hacia arriba

Ejemplo: Obtenga los puntos máximos y mínimos de la función $(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 3$ así como los intervalos en los cuales es creciente y decreciente.

Derivando la función $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$
Igualando con cero la primera derivada $3x^2 - 6x - 9 = 0$
Simplificando y resolviendo la ecuación, se tiene la abscisa de los puntos críticos

$x^2 - 2x - 3 = 0$, $(x - 3)(x + 1) = 0$ con x-3=0 y x+1=0, obteniendo

x=3 y x=-1

Calculando la segunda derivada de la función $f''(x) = 6x - 6$

Evaluando la segunda derivada en los valores críticos.

X	$f''(x) = 6x - 6$	
-1	6(-1)-6=-12	$f''(x) < 0$ *entonces se tiene un máximo en* $x = -1$
3	**6(3)-6=12**	$f''(x) > 0$ *entonces se tiene un mínimo en* $x = 3$

Evaluando los puntos críticos en la función original, se tiene el valor de sus ordenadas

x	$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 3$	
-1	$(-1)^3 - 3(-1)^2$-9(-1)+3= 8	**Entonces se tiene un máximo en (-1,8)**
3	$\mathbf{-3(3)^2 - 9(3) + 3 = -24}$	**Entonces se tiene un mínimo en (3,-24)**

A partir de estos datos, se determinan los intervalos donde la función es creciente o decreciente, es importante tener en cuenta que estos mismos intervalos también es posible obtenerlos mediante la primera derivada de la función.

La función es creciente en: $x \in (-\infty, -1)$ y en $(3, \infty)$ y la función es decreciente en: $x \in (-1,3)$

<u>Traza la gráfica.</u>

EN RESUMEN
MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE UNA FUNCIÓN
UN ENFOQUE A PARTIR DE LAS DERIVADAS

CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA

MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Se llama **Criterio de la primera derivada** al método o teorema utilizado para determinar los mínimos relativos y máximos relativos que pueden existir, donde se observa el cambio de signo, en un intervalo abierto señalado que contiene al punto crítico c.

Para determinar los máximos y mínimos relativos se siguen los siguientes pasos:

1. Se obtiene la función $f(x)$
2. Se obtiene la primera derivada
3. Se iguala a cero la primera derivada y se obtienen sus raíces o puntos críticos.
4. Para cada raíz o punto crítico se considerará un valor menor y otro mayor que se sustituirán en la primera derivada. Si los resultados cambian de + a – existirá un máximo.

Si los resultados cambian de – a + existirá un mínimo.

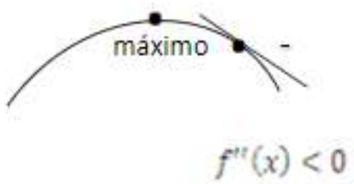
5. Se obtienen las coordenadas de los puntos máximos y mínimos, sustituyendo cada raíz o punto crítico en la función original.

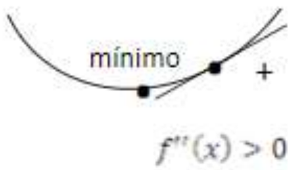
CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA

MÁXIMOS Y MÍNIMOS

El **Criterio de la segunda derivada** es un teorema o método de cálculo matemático en el que se utiliza para efectuar una prueba correspondiente a los máximos y mínimos relativos de una función.
El procedimiento del criterio de la segunda derivada es el siguiente:

1. Se obtiene la función $f(x)$
2. Se obtiene la primera derivada
3. Se obtiene la segunda derivada
4. Se iguala a cero la primera derivada y se determinan sus raíces o puntos críticos.
5. Cada raíz o punto crítico se sustituye en la segunda derivada, se observa el resultado y se aplica la siguiente regla.
   - Si el resultado es positivo (+) existirá un mínimo
   - Si el resultado es negativo (-) existirá un máximo
   - Si el resultado da cero entonces no existe ni máximo ni mínimo





Punto de inflexión

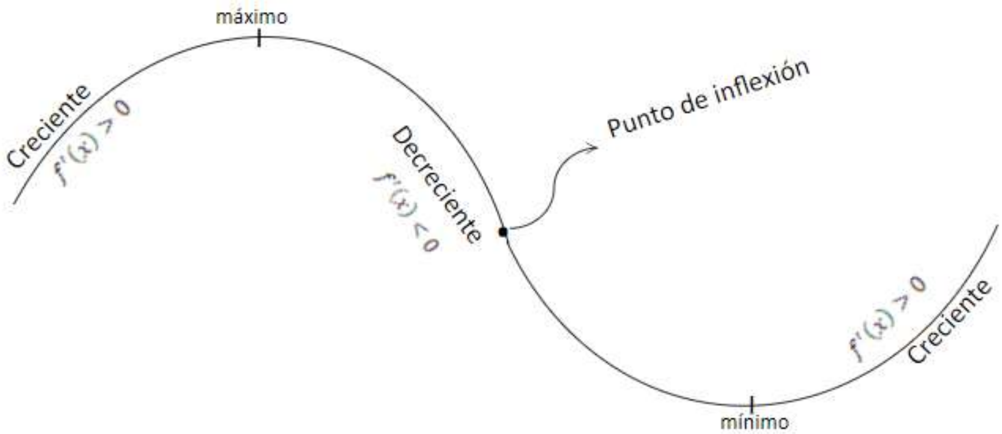
Un punto de inflexión, en una función matemática, es un punto donde los valores de una función continua en x pasan de un tipo de concavidad a otra. La curva "atraviesa" la tangente. Matemáticamente, la segunda derivada de la función f en el punto de inflexión es cero, o no existe.
Para saber si se tiene un punto de inflexión se realiza lo siguiente.

1. Se obtiene la función $f(x)$
2. Se obtiene la primera derivada
3. Se obtiene la segunda derivada
4. Se iguala a cero la primera derivada y se determinan sus raíces o puntos críticos.
5. Se considerará para cada raíz o punto crítico, un valor menor y otro mayor y se sustituye en la segunda derivada, el resultado se observa y se aplica la siguiente regla.
   - Si los resultados cambian de positivo a negativo o de negativo a positivo se dice que existe un punto de inflexión, de lo contrario no existe el punto de inflexión.
   - Los puntos de inflexión se obtiene al sustituir cada raíz o punto crítico en la función original.

Sentido de concavidad
La concavidad de una curva o de una superficie es la parte que se asemeja a la zona interior de una circunferencia o de una esfera, es decir, que tiene su parte hundida dirigida al observador. Es el concepto complementario al de convexidad.

Para determinarlo se siguen los siguientes pasos
1. Se obtiene la función $f(x)$
2. Se obtiene la primera derivada
3. Se obtiene la segunda derivada
4. Se iguala a cero la segunda derivada y se determinan sus raíces o puntos críticos.
5. Por separado y para cada raíz se considera para cada raíz o punto crítico, un valor menor y otro mayor y se sustituye en la segunda derivada, el resultado se observa y se aplica la siguiente regla.
    - Si el resultado es positivo se dice que la función es cóncava
    - Si el resultado es negativo se dice que la función es cóncava hacia abajo.

Intervalos donde la función es creciente o decreciente.
Para determinar los intervalos a partir del criterio de la primera derivada se realiza lo siguiente
1. Se obtiene la función $f(x)$
2. Se obtiene la primera derivada
3. Se iguala a cero la primera derivada y se obtienen sus raíces o puntos críticos.
4. Para cada raíz o punto crítico se considerará un valor menor y otro mayor de forma independiente. Se observa el resultado y se aplica las siguientes reglas.
    - Si el resultado es negativo se dice que la función es decreciente.
    - Si el resultado es positivo se dice que la función es creciente
    - Si el resultado es cero, la función ni crece ni decrece.



Actividad de Aprendizaje 3
Máximos y mínimos

Contenidos	**Máximos, mínimos absolutos. creciente, decreciente**
Competencias Disciplinares	**1. Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas o aleatorios mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.**
Aprendizajes esperados	**AE8) Analiza las regiones de crecimiento y decrecimiento de una función.** **AE9) Encuentra en forma aproximada los máximos y mínimos de una función.**

Nombre del alumno: ____ Fecha: _______________

I. Utilizando el criterio de la primera y/o segunda derivada, determina los máximos, los mínimos y los intervalos para los que la función es creciente o decreciente. (Agrega una imagen de la función hecha con geómetra y resalta la información obtenida con colores)

1. $f(x) = x^2 - 6x + 5$

2. $f(x) = -3x^2 + 5x - 4$

3. $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 5$

4. $\mathbf{f(x)} = \boldsymbol{x^4 - 4x^3}$

II. Dadas las siguientes funciones y utilizando el criterio de la primera y/o segunda derivada determina:
a) Puntos máximos y mínimos
b) Intervalos donde la función crece y decrece
c) Intervalos de concavidad
d) Puntos de inflexión
e) Gráfica hecha por ti a mano y **agrega una** imagen de la función hecha con geogebra para comprobar y resaltar lo obtenido con colores

1. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 24$

2. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 6$

3. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$

4.$f(x) = x^3(x+2)$

Ver
https://www.youtube.com/watch?v=Q73XxigqTP8
https://www.youtube.com/watch?v=sE5jdoJd97g
https://www.youtube.com/watch?v=EsCisbiu9fk

SESIÓN 3 y 4

ASIGNATURA: Cálculo Diferencial	LISTA DE COTEJO Bloque 3	ADA 2 Valor: 15 puntos
GRADO y GRUPO:	FECHA:	

Elemento	Valor en pts.	Valor alcanzados	Observaciones
a. El trabajo se entrega en tiempo y forma a través del representante del equipo. b. La lista de cotejo se integrará en la parte final de la ADA .	-5		
Presenta una **portada** (logotipo, datos de la escuela, Título del trabajo, el criterio, integrantes del equipo, materia, nombre del profesor, grado, grupo y fecha de entrega).	-1		
Formato: Escrito de puño y letra del estudiante, instrucciones en tinta azul o negra, procedimiento con lápiz, respuestas finales resaltadas en rojo, engrampado en la parte superior izquierda con todas las hojas paginadas	-1		
Contenido			
Utiliza los conceptos y presenta explicaciones o procedimientos al resolver máximos y mínimos usando la primera derivada. Emplea la segunda derivada para determinar la concavidad y lo solicitado en la actividad Presenta las graficas y compara con colores sus resultados	10 5		
Participación y actitudes			
Participan de manera colaborativa, honesta y responsable durante la elaboración de la actividad.	-5		*En caso de plagio total o parcial la calificación es CERO.
Demuestran una actitud positiva con el profesor y sus compañeros durante el bloque.			
Total	**15**		

PROBLEMAS APLICATIVOS DE LA DERIVADA
PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

Muchos de los problemas que se presentan en la práctica diariamente, están relacionados de una forma u otra, con encontrar los valores máximos y mínimos de una función, y más aún, determinar para qué valores de la variable independiente se alcanzan estos. Estos problemas se llaman, en general, *problemas de optimización.*
En términos generales, un problema de optimización consiste en encontrar el valor mínimo o minimizar, o encontrar el valor máximo o maximizar, una cierta función, de tal forma que satisfagan ciertas condiciones dadas.
La optimización es muy útil en situaciones sociales, políticas, económicas, de ahí la importancia de su estudio.
La solución o soluciones óptimas son aquellas para las cuales se satisfacen las restricciones del problema y el valor de la función sea mínimo o máximo.
La función que representa el problema de optimización se le llama *función objetivo.*
Fases en la solución de un problema de Optimización
1. Planteamiento del problema
2. Formulación Matemática (construir la función objetivo si no se da explícitamente) es decir modelar la función de tal manera que si el problema depende de dos variables, se debe relacionar de tal manera que la función dependa de una sola variable. Dicha relación es una condición que da el problema (a veces de manera intrínseca)
3. Análisis del comportamiento de la función objetivo (puede incluir su representación gráfica)
4. obtener el máximo o mínimo según corresponda
5. Comprobar que la solución sea la adecuada.

Ejemplos

1. Disponemos de 100 m de alambre para cercar un campo rectangular, determina las dimensiones que debe tener dicho campo para que la superficie sea máxima.

Primero representemos el ejemplo de alguna manera para poder tener una idea más clara de lo que nos indica.

Como se quiere cercar con 100 m se puede representar
$2x + 2y = 100$ simplificada la ecuación nos queda $x + y = 50$
Despejemos la ecuación con respecto a una variable $y = 50 - x$

Nos piden que se quiere el área máxima por lo que determinemos la función área
$A(x) = xy$ como esta en términos de dos variables sustituyamos para tener una función con una sola variable $A(x) = x(50 - x) = 50x - x^2$

Determinemos la primera derivada de la función área
$A'(x) = 50 - 2x$

Igualemos a cero la derivada
$50 - 2x = 0$

Despejemos para determinar los puntos críticos
$50 - 2x = 0$
$x = \frac{50}{2} = 25$

Sustituyamos en la derivada un valor más pequeño supongamos 24 y uno más grande que 25 supongamos 26.
$50 - 2x = 50 - 2(24) = 50 - 48 = 2$ signo positivo
$50 - 2x = 50 - 2(26) = 50 - 52 = -2$ signo negativo

Así 25 es un máximo por lo tanto la base vale 25 y la altura también.

2. Descomponer el número 16 en dos sumandos positivos tales que su producto sea máximo.

Sean x e y dichos sumandos: $x + y = 16 \Rightarrow y = 16 - x$

La función a optimizar es la que determina el producto de ambos números:

$x \cdot y = x \cdot (16 - x) = 16x - x^2 \Rightarrow f(x) = 16x - x^2$

$f'(x) = 16 - 2x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 16 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{16}{2} = 8$

f''(x) = −2 < 0 , por tanto x = 8 es un máximo, y = 16 − 8 = 8 Los dos sumandos son ambos iguales a 8.

3. La concentración de ozono contaminante, en microgramos por metro cúbico, en una ciudad viene dada por la función $C(x) = 90 + 15x - 0,6x^2$, donde x es el tiempo transcurrido desde 1 de enero de 2000 contado en años.

¿Hasta que año está creciendo la concentración de ozono?

En éste caso nos dan la función trabajemos con ella

$C(x) = 90 + 15x - 0,6x^2$

$C(x) = 15 - 1.2x$

$15 - 1.2x = 0$

$x = \frac{15}{1.2} = 12.5$

Al comprobar si es máximo o mínimo se puede comprobar que es máximo. En 12.5 años desde el 2000
Así la mayor concentración de ozono contaminante fue el 30 de junio de 2012.

PROBLEMAS PRÁCTICOS DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Ejemplo: Un proyectil es disparado siguiendo una trayectoria parabólica, dada por la ecuación $h = -t^2 + 8t - 13$, donde h es la altura en metros y t el tiempo en segundos. Halla el tiempo en que alcanza su altura máxima y el valor de ésta.

En este caso la función objetivo a maximizar es $h = -t^2 + 8t - 13$
Derivando la altura con respecto al tiempo, igualando a cero y resolviendo la ecuación

$h' = -2t + 8$

$-2t + 8 = 0$

$t = 4$ Por lo tanto el punto crítico se presenta cuando t = 4 La segunda derivada es $h'' = -2$

En el punto crítico $h''(4) = -2 < 0$ entonces en t= 4 la función presenta un máximo.

Sustituyendo t en h se obtiene $h = -(4)^2 + 8(4) - 13 = 3$, por lo tanto el proyectil tarda 4 segundos en alcanzar la altura máxima que es de 3 metros

Se desea construir una caja sin tapa con una lámina rectangular de 40 cm. de largo y 30 cm., de ancho, cortando un cuadrado de lado x en las cuatro esquinas y doblando las cejas hacia arriba para formar la caja. Encuentra las dimensiones de la caja que dan el volumen máximo que puede construirse de esta forma.

Para la solución del problema, desarrolla:

a) El modelo geométrico asociado al problema.

b) La condición que debe cumplir la profundidad (altura) de la caja.

c) El modelo matemático asociado al problema.

d) El Registro tabular.

e) La Gráfica de la función volumen.

f) La Interpretación de la gráfica para el volumen máximo.

g) Utilizando el criterio de la primera derivada para resolver el problema.

h) Utilizando el criterio de la segunda derivada para resolver el problema.

a) El modelo geométrico del problema se presenta en la figura 1

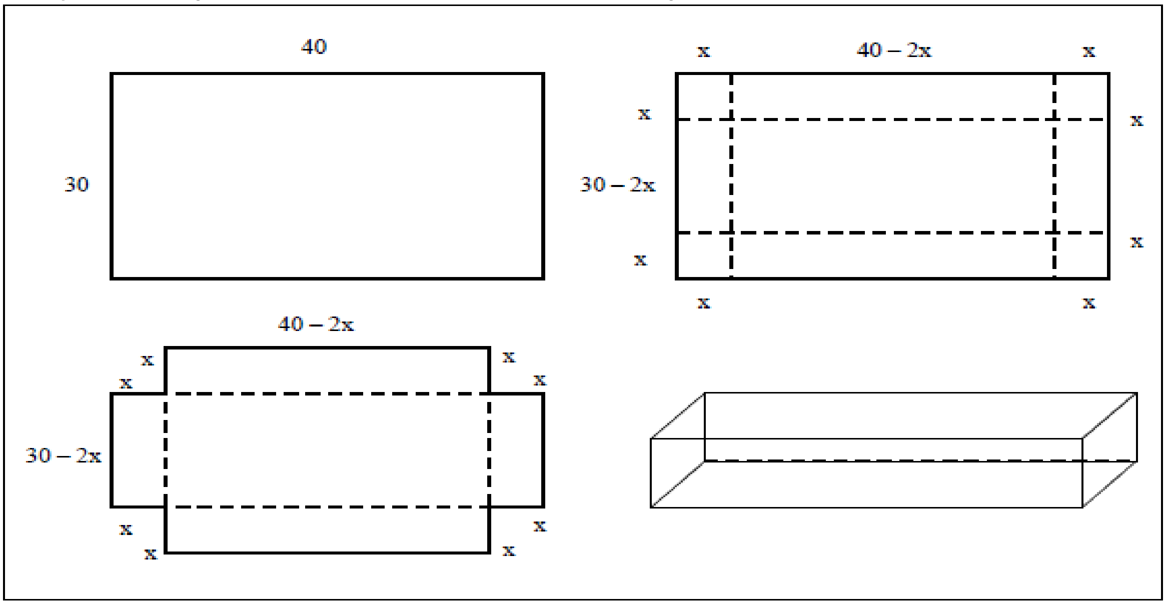


Figura 1. Modelo geométrico del problema

b) Condición de la profundidad de la caja. Como las dimensiones de la caja son longitudes, entonces se deben cumplir las condiciones:

La profundidad debe ser x El largo debe ser $40 - 2x$, El ancho debe ser $30 - 2x$,

Para que se cumplan las tres condiciones.

c) Modelo matemático.

El volumen de la caja se encuentra multiplicando sus dimensiones, es decir,

$V(x) = x(40-2x)(30-2x) = 4x^3 - 140x^2 + 1200x$.

d) Registro tabular.

Evalúa la profundidad, el largo, el ancho y completa los datos restantes de la tabla 1.

Profundidad	Largo	Ancho	Volumen
x	40-2 x	30-2 x	x (40-2 x)(30-2 x)
0	40	30	0
1			
2	36	26	1872
3		24	2448
4	32		2816
5	30	20	
6	28	18	3024
7			
8	24	14	2688
9		12	2376
10	20	10	2000
11	18		1584
12	16	6	
13	14	4	728
14			
15	10	0	0

Tabla 1. Registro tabular de las dimensiones y volumen de la caja.

e) La Gráfica de la función volumen (Figura 2)

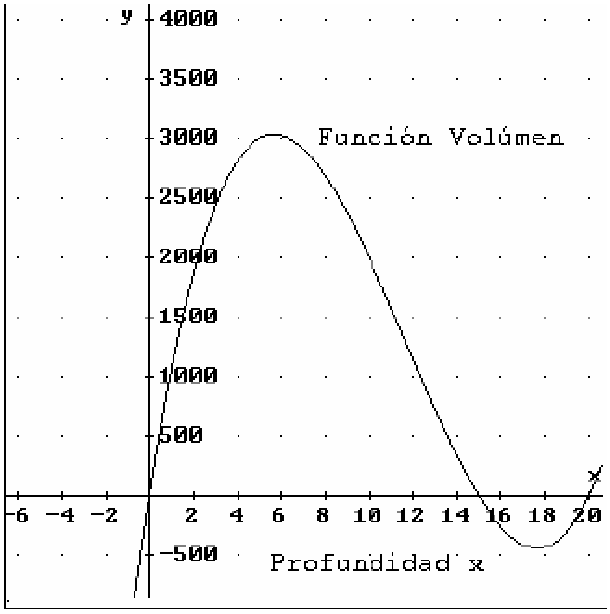


Figura 2. Gráfica de la función volumen de la caja

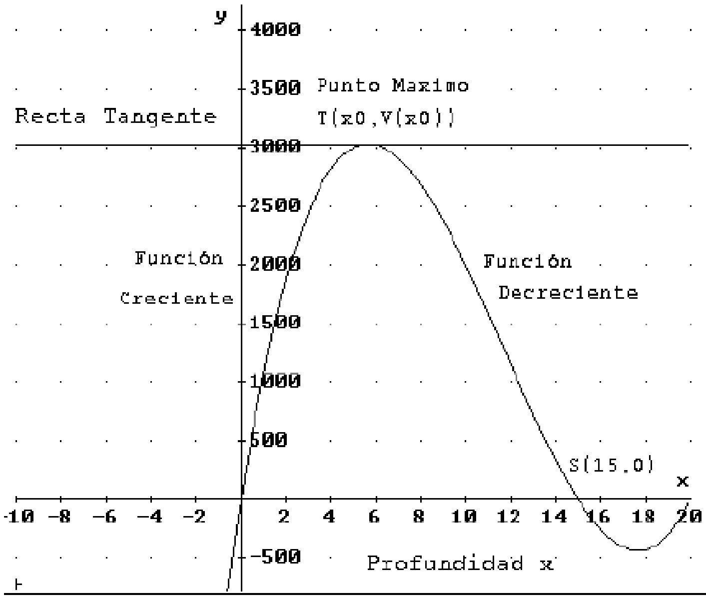


Figura 3. Recta tangente paralela al eje de las abscisas

¿Qué significa encontrar el máximo volumen de la caja? ____

Significa determinar la profundidad *x* de la caja que da el volumen máximo de la misma. Geométricamente significa encontrar la coordenada *x* para la cual la gráfica tiene un máximo. Para hacer esto de manera precisa encontraremos la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto máximo, como se presenta en la figura 3.

f) Interpretación de la gráfica para el volumen máximo.

El punto $T(x_0, v(x_0))$ es el máximo de la función volumen, luego a la izquierda de T la función es creciente ya que para $x_1 < x_2$, se tiene que $f(x_1) < f(x_2)$, a la derecha del punto T entre los puntos T y S, la función es decreciente, ya que para $x_1 < x_2$, se tiene que $f(x_1) > f(x_2)$. Además, de la figura 2 observamos que la condición para que la función alcance su máximo, la pendiente de la recta tangente en el punto de tangencia T debe ser $v'(x) = 0$ (derivada de la función o razón de cambio instantánea).

Con la información dada, responde las siguientes preguntas:

¿Cómo es el signo de la derivada a la izquierda del punto máximo? ______________________________

¿Cómo es el signo de la derivada entre los puntos T y S? ______________________________ De acuerdo, el signo de la derivada a la izquierda del punto máximo es positivo, y es negativo entre los puntos T y S. Por lo que podemos establecer las condiciones del primer criterio de la derivada para calcular máximos y mínimos de funciones:

1. Determinar la derivada $v'(x)$ de la función $v(x) = 4x^3 - 140x^2 + 1200x$.
2. Resolver la ecuación $v'(x) = 0$, para determinar los valores críticos de la función candidatos para obtener los máximos o mínimos de la función.
3. Analizar el signo de la derivada alrededor de cada uno de los valores críticos, primero para un valor un poco menor que el valor crítico y después para un valor un poco mayor que él. Si el signo de la derivada cambia de positivo a negativo, la función tiene un máximo para ese valor crítico, en caso contrario, la función tiene un mínimo para ese valor crítico. Cuando el signo no cambia, la función no tiene máximo ni mínimo para ese valor crítico considerado.
4. Calcular los valores máximos y mínimos de la función al evaluarla en los valores críticos que dan los valores máximos o mínimos.

g) Aplicando el criterio de la primera derivada para resolver el problema.

1. Aplica las fórmulas de la derivación y determina la derivada de la función volumen

$v(x) = 4x^3 - 140x^2 + 1200x$, la derivada es $v'(x) = 12x^2 - 280x + 1200$.

2. Resuelve la ecuación $f'(x) = 0$, para determinar los valores críticos de la función, es decir, las abscisas de los puntos máximos y mínimos de la función volumen.

$12x^2 - 280x + 1200 = 0$, para resolver la ecuación cuadrática, utilizamos la ecuación general de segundo grado, es decir,

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, donde a = 12, b = - 280 y c = 1200.

$$x = \frac{-(-280) \pm \sqrt{(-280)^2 - 4(12)(1200)}}{2(12)} \qquad = \qquad x = \frac{280 \pm \sqrt{20800}}{24}$$

$$x1 = \frac{280 + 144.222051}{24} = 17.67591879 \qquad y \qquad x2 = \frac{280 - 144.222051}{24} = 5.657414542$$

Los valores x_1 y x_2 son los valores buscados, sin embargo, x_1 no lo consideramos dado que su valor rebasa el rango de la profundidad de la caja.

3. Analiza el signo de la derivada alrededor de los valores críticos.

Para el valor crítico x_2 = 5.657414542, consideremos los valores x = 5 y 6. Por lo que

v'(5) = $12(5)^2$ – 280(5) + 1200 = 300 – 1400 + 1200= 100 > 0.

Por lo que v'(6) = $12(6)^2$ – 280(6) + 1200 = 432 – 1680 + 1200= -48 < 0.

Como el signo de la derivada cambia de positivo a negativo, concluimos que la función tiene un máximo para el valor crítico x = 5.657414542.

4. Calcular el valor máximo de la función.

Máximo = v(5.657414542) = $4(5.657414542)^3 - 140(5.657414542)^2 + 1200(5.657414542)$

= 3032.302466 cm3.

h) Aplicando el criterio de la segunda derivada para resolver el problema:

Sabemos que cuando una función es creciente su derivada es positiva y cuando es decreciente su derivada es negativa.

En este sentido, consideremos la función derivada v'(x) = 12 x^2 – 280 x + 1200 y elaboremos una tabla que contenga los valores con los datos de la profundidad que se muestran en la tabla 2.

De la tabla 2, observamos que la función derivada es decreciente desde 0 hasta el punto S, por lo que el signo de la derivada de la función derivada (o sea la segunda derivada) es negativo, es decir, v''(x) < 0, en cambio, la función derivada es creciente desde el punto S hasta +∞, luego el signo de la segunda deriva es positiva o sea v''(x) > 0.

Podemos establecer las condiciones del segundo criterio de la derivada para calcular máximos y mínimos de funciones:

1. Determinar la derivada v'(x) de la función v(x) = $4x^3 - 140x^2 + 1200x$.

2. Resolver la ecuación v'(x) = 0, para determinar los valores críticos de la función candidatos para obtener los máximos o mínimos de la función.

3. Hallar la segunda derivada.

4. Sustituir en la segunda derivada v''(x), en lugar de la profundidad, cada uno de los valores críticos obtenidos. Si el signo de la segunda derivada es negativo, la función tiene un máximo para ese valor crítico, en caso contrario, la función tiene un mínimo para ese valor crítico. Cuando v''(x) = 0, no es aplicable el criterio, pero puede ser resuelto aplicando el primer criterio.

5. Calcular los valores máximos y mínimos de la función al sustituir en la función v(x) los valores críticos.

6. Aplicando el segundo criterio de la derivada para la resolución del problema:

1. Determinamos la primera derivada de la función v(x) = $4x^3 - 140x^2 + 1200x$,
cuyo resultado es
v'(x) = $12x^2 - 280x + 1200$

2. Resolvemos la ecuación v'(x) = 0, es decir, $12x^2 - 280x + 1200 = 0$, para determinar los valores críticos de la función, la solución de acuerdo al criterio de la primera derivada es x_2 = 5.657414542.

3. Hallamos la segunda derivada de la función volumen, cuyo resultado es
v''(x) = $24x - 280$.

4. Sustituimos el valor crítico 2 x = 5.657414542 en la segunda derivada, es decir,
v''(5.657414542) = 24(5.657414542) – 280 = 135.777949 – 280 = -144.222051 < 0, por lo que la función v(x) tiene un máximo en el valor crítico en x = 5.657414542.

5. Máximo = v(5.657414542)
= $4(5.657414542)^3 - 140(5.657414542)^2 + 1200(5.657414542)$
= 3032.302466 cm^3.

Por lo que las dimensiones de la caja que dan el máximo volumen se presentan en la tabla 3.

Profundidad	Largo	Ancho	Volumen
x	$40-2x$	$30-2x$	$x\ (40-2x)(30-2x)$
5.657414542	28.68517092	18.68517092	3032.302466

Tabla 3. Dimensiones de la caja y volumen máximo.

Ejemplo. Construir la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 7$, especificando:

A) Puntos máximos, mínimos y de inflexión.

B) Concavidades.

C) Trazado de la gráfica de la función.

Solución con el criterio de la segunda derivada.

1. Encontrando la primera derivada de la función $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x -$ 7. La derivada de la función es $f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$
2. Resolviendo la ecuación $f'(x) = 0$, para determinar los valores críticos de la función, es decir, las abscisas de los puntos máximos y mínimos de la función. Por lo que:

$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24 = 3(x^2 - 6x + 8) = (x - 4)(x - 2) = 0$, como el producto de dos factores es cero, alguno es cero, resultando $x - 4 = 0$ y $x - 2 = 0$, obteniendo los valores críticos de la función $x = 4$ y $x = 2$.

3. Encuentra la segunda derivada de la función $f(x)$ y resuelve la ecuación $f''(x) = 0$, para determinar las abscisas de los puntos de inflexión.

La segunda derivada es $f''(x) = 6x - 18$, al resolver la ecuación $f''(x) = 0$ se tiene que $6x - 18 = 6(x - 3) = 0$, por lo que $x - 3 = 0$, donde $x = 3$, es el valor solicitado.

4. Analizando los signos de la segunda deriva para los valores $x= 4$ y $x= 2$

Si el signo de la segunda derivada es negativa se tiene un máximo y la gráfica de la función es cóncava hacia abajo, en caso contrario se tiene un mínimo y es cóncava hacia arriba.

Al sustituir el valor crítico $x = 2$ en la segunda derivada, se obtiene $f''(2) = 6(2) - 18 = 12 - 18 = -6 < 0$, por lo que la función tiene un valor máximo y es cóncava hacia abajo. Al sustituir el valor crítico $x = 4$ en la segunda derivada, se obtiene $f''(4) = 6(4) - 18 = 24 - 18 = 6 > 0$, por lo que la función tiene un valor mínimo y es cóncava hacia arriba.

5. Sustituyendo en la función $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 7$ los valores críticos y en la abscisa del punto de inflexión, para determinar, el máximo, mínimo y punto de inflexión, tal como se especifica a continuación:

Máximo = *f* (2) = (2)3 – 9(2)2 + 24(2) – 7 = 8 – 36 + 48 – 7 = 13.

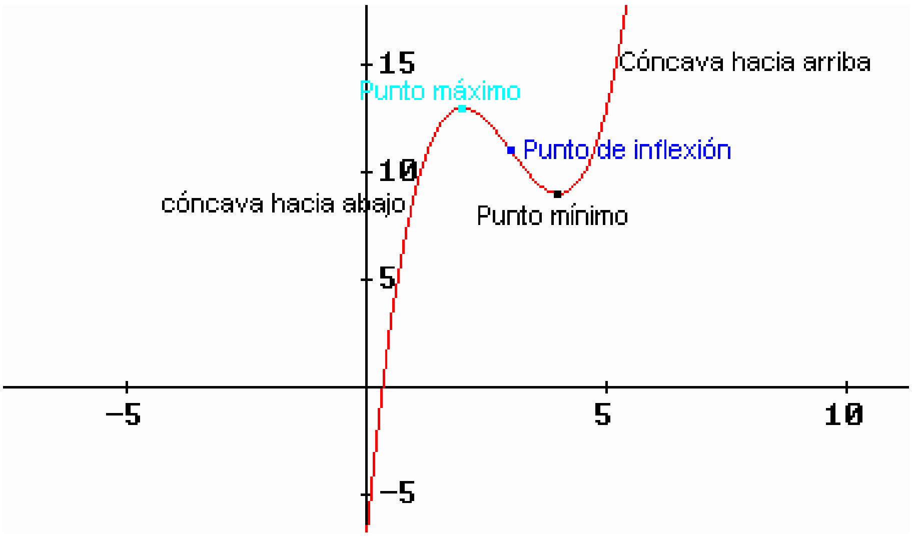
Punto de inflexión = *f* (3) = (3)3 – 9(3)2 + 24(3) – 7 = 27 – 81+ 72 – 7 = 11.

Mínimo = *f* (4) = (4)3 – 9(4)2 + 24(4) – 7 = 64 – 144 + 96 – 7 = 9.

Sustituye algunos valores a la izquierda del valor crítico *x* = 2 y a la derecha del valor crítico *x* = 4 en la función *f* (*x*) = *x* 3 - 9 *x* 2 + 24 *x* – 7, para obtener otros puntos adicionales para un mejor trazado de la gráfica.

7. Construye la gráfica de la función. La gráfica debe ser como la mostrada en la figura 4.

Gráfica de la función *f* (*x*) = *x* 3 - 9 *x* 2 + 24 *x* – 7.



Ver:

https://www.youtube.com/watch?v=Z_0gbPW-xYI&list=PLNQqRPuLTic8ezNX2-usIdIPxX2eMrbZL

https://www.youtube.com/watch?v=Q9gKnHD_-0A

Actividad de aprendizaje 4
Optimización

Contenidos	Optimización. Máximos, mínimos absolutos.
Competencias Disciplinares	1. Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas o aleatorios mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.
Aprendizajes esperados	AE11) Localiza los máximos, mínimos y las inflexiones de una gráfica para funciones polinomiales y trigonométricas

Nombre del alumno: ____ **fecha:** ______________

I. Utilizando el criterio de la primera o el criterio de la segunda derivada, determina lo que se te solicita y selecciona la respuesta correcta

- **Determina la función que modele la siguiente situación:** ***Determina dos números cuya suma sea 20 y el producto del cuadrado de uno de ellos por el cubo del otro sea un valor máximo***
  a) $\mathrm{f(x)} = x^3(20 - x)^2$
  b) $\mathrm{f(x)} = x^3(x - 20)^2$
  c) $\mathrm{f(x)} = x^2(x - 20)^3$
  d) $\mathrm{f(x)} = x^2(20 - x)^3$

- **Determina los valores críticos de la siguiente situación:** ***De las cuatro esquinas de una lámina cuadrada de lado 24, se suprimen cuadrados iguales de lado x. Se doblan los bordes de la lámina recortada para formar una caja sin tapa. Determina la longitud de x, para que el volumen de la caja sea máxima.***
  a) 2 y 12
  b) 2 y 16
  c) 4 y 12
  d) 4 y 16

- **Determina el volumen que debe tener el frasco y el costo de ella, para que sea mínimo en la siguiente situación:** ***En una fábrica de perfumes se sabe que el costo del frasco está dada por la función*** $\boldsymbol{f(x) = \frac{5}{x} + x - 4}$ ***donde*** $\boldsymbol{x}$ ***es mayor que cero y representa el volumen del frasco*** **en litros.**
  a) $1\ litro\ con\ un\ costo\ de\ \$2$
  b) $\sqrt{5}\ litros\ con\ un\ costo\ de\ \$0.47$
  c) $\sqrt{5}\ litros\ con\ un\ costo\ de\ \$2$
  d) $1\ litro\ con\ un\ costo\ de\ \$0.47$

- **Determina la máxima medida que debe tener el larguero y los postes de una portería en la siguiente situación: Se tiene una barra de aluminio de 6m para construir una portería de futbol. Si se desea que sea el área máxima ¿cuánto deben medir los postes y el larguero?**
  a) Larguero 1.5m y los postes 3m
  b) larguero 3m y los postes 1.5m
  c) Larguero 4m y los postes 2m
  d) Larguero 2m y los postes 4m

II. Resuelve cada problema que a continuación se te presenta, indicando en cada uno de ellos la función que representa el problema así como el procedimiento que usaste para resolverlos, no olvides fundamentar tus respuestas.

1. **Con un cartón de 20 cm por 10 cm se quiere construir una caja sin tapa cortando un cuadro en cada esquina la cual debe medir entre dos y tres centímetros. Determina las dimensiones de la caja para que su volumen sea máximo.**

2. **Determina una pareja de números x e y tales que y sea el doble del cuadrado de x y que la resta de sus cuadrados $x^2 - y^2$ sea máxima.**

3. **Una empresa está trazando parcelas iguales y rectangulares sobre el plano de un terreno para construir chalets de $200m^2$de superficie. Según la legislación de la zona, entre cada chalet d y la valla de la parcela debe haber un margen de 3 m en los lados verticales y 10m en los lados horizontales. Determina las dimensiones que debe tener la parcela para que su área sea mínima ¿Cuál es el área de la parcela?**

4. **Determina las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en un círculo de radio ½.**

ASIGNATURA: Cálculo Diferencial	**LISTA DE COTEJO** **Bloque 3**	**ADA 4** **Valor: 15 puntos**
GRADO y GRUPO:	**FECHA:**	

Elemento	**Valor en pts.**	**Valor alcanzados**	**Observaciones**
c. El trabajo se entrega en tiempo y forma a través del representante del equipo. d. La lista de cotejo se integrará en la parte final de la ADA .	-5		
Presenta una **portada** (logotipo, datos de la escuela, Título del trabajo, el criterio, integrantes del equipo, materia, nombre del profesor, grado, grupo y fecha de entrega).	-1		
Formato: Escrito de puño y letra del estudiante, instrucciones con tita azul o negra, procedimientos a lápiz, respuesta finales resaltadas en rojo. Engrampado superior izquierdo, paginación.	-1		
Contenido			
Resuelve todos los problemas planteados emplea en forma correcta la derivada para dar solución a los solicitado. Procedimientos claros, completos y correctos. Responde en forma correcta lo que se pide	15		
Participación y actitudes			
Participan de manera colaborativa, honesta y responsable durante la elaboración de la actividad.	-2		*En caso de plagio total o parcial la calificación es CERO.
Demuestran una actitud positiva con el profesor y sus compañeros durante el bloque.			
Total	**15**		

METACOGNICIÓN

Excelente = Logré el aprendizaje de manera independiente. Bueno = Necesité ayuda para construir mi aprendizaje.

Regular = Fue difícil el proceso de aprendizaje y lo logré parcialmente

	Criterios	Niveles de desempeño		
		Excelente	Bueno	Regular
Procedimental	Aplica adecuadamente las reglas de derivación para la primera derivada			
	Determina los puntos críticos			
	Aplica adecuadamente las reglas de derivación para la segunda derivada			
	Determina los puntos de inflexión			
	Determina los intervalos crecientes y decrecientes			
	Determina la concavidad de la función			
	Encuentra el máximo o mínimo relativo de la función			
Actitudinal	Organizas tu horario de trabajo			
	Organizas la información e investigas los temas			
	Te interesas en ver los videos y las lecturas por el bien individual y colectivo			
	Valoras el trabajo en equipo aportando y refutando ideas en la resolución de problemas.			
	Cumples con las indicaciones dadas para el buen desarrollo de las actividades.			
	Buscas y sugieres soluciones a los problemas planteados.			